OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10 FEBRUARIE 2024

Clasa a VIII-a

Problema 1. Se consideră numerele: $a=\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}$ și $b=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}}\cdot\frac{12}{\sqrt{9}+\sqrt{5}}$.

a) Calculați a^2.

b) Determinați numărul natural n pentru care $5n\left(a+b\right)^{2024}$ este număr prim.

Soluție:

a) $a^2=\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2=7-2\sqrt{6}-2\sqrt{49-24}+7+2\sqrt{6}$ 2p

$a^2=14-2\sqrt{25}=4$ 1p

b) $a=\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}$ și $\sqrt{7-2\sqrt{6}}<\sqrt{7+2\sqrt{6}}\Rightarrow a<0$ 1p

$a^2=4$ și $a<0\Rightarrow a=-2$ 1p

$b=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}}\cdot\frac{12}{\sqrt{9}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\left|\sqrt{5}-3\right|}\cdot\frac{12}{3+\sqrt{5}}=\frac{1}{3-\sqrt{5}}\cdot\frac{12}{3+\sqrt{5}}=\frac{12}{4}=3$ 1p

$5n\left(a+b\right)^{2024}=5n\left(-2+3\right)^{2024}=5n$ este prim $\Rightarrow n=1$ 1p

Problema 2.

Se consideră expresiile $E\left(x\right)=x^2+2x+5$ și $F\left(x\right)=\left(x^2+2x-5\right)\cdot E\left(x\right)+1$, unde x este număr real.

a) Dacă n este număr natural, scrieți $E\left(n\right)$ ca sumă de două pătrate perfecte.

b) Aflați valoarea minimă a expresiei $F\left(x\right)$ și determinați valorile lui x pentru care se realizează minimul.

Soluție:

a) $E\left(x\right)=x^2+2x+5\Rightarrow E\left(n\right)=n^2+2n+5$ 1p

$E\left(n\right)=n^2+2n+5=n^2+2n+1+4=\left(n+1\right)^2+2^2$ 2p

b) $F\left(x\right)=\left(x^2+2x-5\right)\cdot\left(x^2+2x+5\right)+1=\left(x^2+2x\right)^2-25+1$ 1p

$F\left(x\right)=\left(x^2+2x\right)^2-24$; $\left(x^2+2x\right)^2\geq 0\Rightarrow F\left(x\right)\geq -24\Rightarrow$ valoarea minimă a lui $F\left(x\right)$ este -24......1p

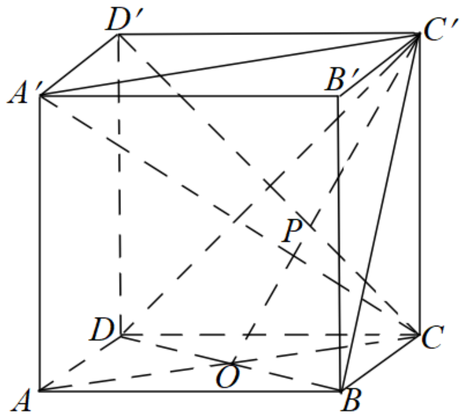
$F\left(x\right)=-24$ pentru $\left(x^2+2x\right)^2=0$ 1p

$\left(x^2+2x\right)^2=0\Rightarrow x\in\{-2;0\}$ 1p

Problema 3. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia a, O este centrul feței $ABCD$, $A'C\cap C'O=\{P\}$.

a) Aflați tangenta unghiului dintre dreptele $A'C$ și $B'C'$.

b) Arătați că $A'P\perp(C'BD)$.



Soluție:

a) $A'D' \parallel B'C' \Rightarrow \sphericalangle(A'C;B'C')=\sphericalangle(A'C;A'D')=\sphericalangle D'A'C$ 1p

$A'D'\perp(D'DC)$ și $D'C\subset(D'DC)\Rightarrow$

$A'D'\perp D'C\Rightarrow\Delta A'D'C$ dr. în D'. 1p

$tg\sphericalangle D'A'C=\dfrac{D'C}{D'A'}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$ 1p

b) **<u>O soluție</u>**

Cf. TFA: $\Delta POC\sim\Delta PC'A'\Rightarrow\dfrac{PO}{PC'}=\dfrac{OC}{C'A'}\Rightarrow\dfrac{PO}{PC'}=\dfrac{1}{2}$.... ....1p

$C'D=C'B=BD=a\sqrt{2}\Rightarrow\Delta C'BD$ este echilateral, $CC'=CD=CB=a$, deci $CC'BD$ este piramidă triunghiulară regulată de vârf C și bază $C'BD$ 1p

$C'O$ este mediană în $\Delta C'BD$ echilateral și $P\in C'O$ a.î. $\dfrac{PO}{PC'}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow P$ este centrul de greutate al $\Delta C'BD$ 1p

$CC'BD$ este piramidă triunghiulară regulată de vârf C și bază $C'BD$ și P este centrul $\Delta C'BD\Rightarrow$ CP este înălțimea piramidei $CC'BD\Rightarrow CP\perp(C'BD)\Rightarrow A'P\perp(C'BD)$

....1p

<u>O altă soluție</u>

$\dfrac{CO}{C'C}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ și $\dfrac{CC'}{C'A'}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\dfrac{CO}{C'C}=\dfrac{CC'}{C'A'}$ 1p

$\dfrac{CO}{C'C}=\dfrac{CC'}{C'A'}$ și $\sphericalangle OCC'\equiv\sphericalangle CC'A'\,(90^\circ)\Rightarrow\Delta OCC'\sim\Delta CC'A'\Rightarrow\sphericalangle COC'\equiv\sphericalangle C'CA'$ 1p

$\sphericalangle COC'\equiv\sphericalangle C'CA'$ și $\sphericalangle C'CA'+\sphericalangle PCO=90^\circ\Rightarrow\sphericalangle COC'+\sphericalangle PCO=90^\circ\Rightarrow\sphericalangle COP+\sphericalangle PCO=90^\circ\Rightarrow$ $\sphericalangle OPC=90^\circ\Rightarrow A'C\perp OC'$ 1p

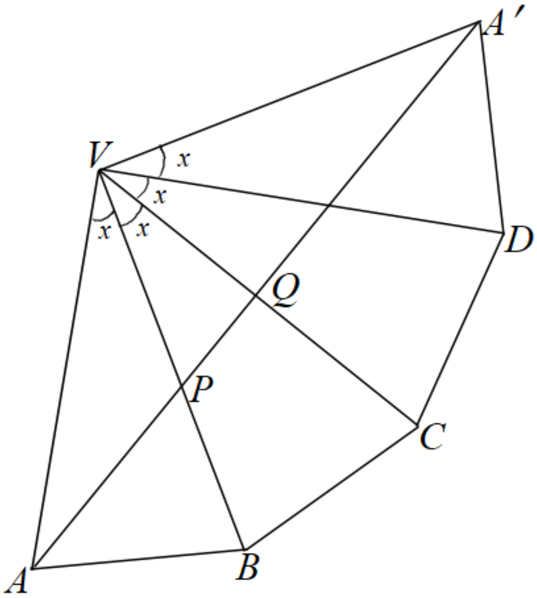
$BD\perp(A'AC)$ și $A'C\subset(A'AC)\Rightarrow BD\perp A'C$;

$A'C\perp BD,\ A'C\perp OC',\ BD\cap OC'=\{O\},\ BD,OC'\subset(C'BD)\Rightarrow A'C\perp(C'BD)\Rightarrow A'P\perp(C'BD)$.......1p

Problema 4. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată de vârf V și bază $ABCD$. O furnică pleacă din punctul A și ajunge tot în punctul A, mergând pe toate fețele laterale. Știind că lungimea drumului parcurs este minimă și că distanța parcursă pe fața VAB este de două ori mai mare decât cea parcursă pe fața VBC, determinați măsurile unghiurilor feței VAB.

S.G.M. nr. 10 / 2023

Soluție:



Drumul minim este AA' de pe desfășurare

Fețele laterale fiind triunghiuri isoscele congruente de vârf $V \Rightarrow \sphericalangle AVB = \sphericalangle BVC = \sphericalangle CVD = \sphericalangle DVA' = x$ ..1p

$\sphericalangle AVB = \sphericalangle BVC \Rightarrow VP$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AVQ$ ……………………………………………1p

Aplicând teorema bisectoarei în ΔAVQ se obține $\frac{AP}{PQ} = \frac{VA}{VQ}$; din ipoteză $\frac{AP}{PQ} = 2$, deci

$\frac{VA}{VQ} = 2 \Rightarrow VA = 2VQ$ ……………………………………………………………………………..1p

$VA \equiv VA' \Rightarrow \Delta VAA'$ este isoscel;

$\sphericalangle AVQ = \sphericalangle A'VQ = 2x \Rightarrow VQ$ este bis. $\sphericalangle AVA'$; cum $\Delta VAA'$ este isoscel $\Rightarrow VQ$ este înălțime în

$\Delta VAA' \Rightarrow \sphericalangle VQA = 90°$ ……………………………………………………………………………...1p

ΔVQA dr în Q și $VA = 2VQ \Rightarrow$ (Cf. R.T $\sphericalangle 30°$) $\sphericalangle VAQ = 30° \Rightarrow \sphericalangle VAA' = 30°$ ………………………1p

$\Delta VAA'$ este isoscel de bază AA', $\sphericalangle VAA' = 30° \Rightarrow \sphericalangle VA'A = 30°$ și $\sphericalangle AVA' = 120° \Rightarrow \sphericalangle AVB = 30°$ ……1p

$\Delta AVB : \sphericalangle AVB = 30°; \sphericalangle VAB = \sphericalangle VBA = 75°$ …………………………………………………………...1p